Procesy stochastyczne

Lista 6

Zad 1. Wykazać, że proces Wienera $W = \{W_t\}_{t\in[0,\infty)}$ nie jest całkowalny w kwadracie, ale jest lokalnie całkowalny kwadracie.

Zad 2 (Uogólnione twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej)**.** Wykazać, że jeśli $X \in \Lambda^2_T$ (jest lokalnie całkowalnym w kwadracie procesem prognozowalnym) i τ jest momentem stopu, to $1_{[0,\tau]X\in\Lambda^2_T}$ oraz

$$\int_0^{t\wedge\tau} X dW_t = \int_0^t 1_{[0,\tau]} X dW_t.$$

Zad 3. Niech τ będzie momentem zatrzymania takim, że $E(\tau) < \infty$. Wykazać, że $I_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}^2_\infty$ oraz $\int_0^\tau I_{[0,\tau]}(s) dWs = W_\tau$. Wywnioskować stąd, że $E(W_\tau) = 0$ oraz $E(W^2_\tau) = E(\tau)$.

Zad 4. Wykazać, że każdy ciągły martyngał lokalny $M = \{M_t\}_{t<T}$, którego trajektorie mają skończone wahanie na kazdym przedziale $[0, t]$ jest stale równy M_0.

Zad 5 (Jednoznaczność rozkładu Dooba-Meyera)**.** Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{T,loc}$ wykazać, że z dokładnością do procesów nierozróżnialnych, istnieje co najwyżej jeden proces $\langle M\rangle = \{\langle M\rangle_t\}_{t\in[0,T]}$ taki, że

1) $\langle M\rangle_0 = 0$;
2) $\langle M\rangle$ ma ciągłe, niemalejące trajektorie;
3) $\{M^2_t - \langle M\rangle\}_{t\in[0,T]}$ jest martyngałem.

Zad 6. Wykazać, że jeśli $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{T,loc}$, $M \equiv 0$, i $X \in \Lambda^2_T(M)$ to $N = \int XdM \in \mathcal{M}^{2,c}_{T,loc}$, $N \equiv 0$ oraz odwzorowanie

$$\Lambda^2_T(M) \ni X \longmapsto \int XdW \in \mathcal{M}^{2,c}_{T,loc}$$

jest liniowe.

Zad 7. Dla dowolnych ciągłych martyngałów lokalnych M i N, wykazać, że

a) $\langle M, M\rangle = \langle M\rangle = \langle -M\rangle$,
b) $\langle M, N\rangle = \langle N, M\rangle$,
c) $\langle M - M_0, N\rangle = \langle M, N - N_0\rangle = \langle M - M_0, N - N_0\rangle = \langle M, N\rangle$,
d) przekształcenie $(N, M) \mapsto \langle N, M\rangle$ jest dwuliniowe,
e) $\langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M^\tau, N\rangle = \langle M, N^\tau\rangle = \langle M, N\rangle^\tau$, dla każdego momentu stopu τ,
f) Jeśli $X \in \Lambda^2_T(M)$ i $Y \in \Lambda^2_T(N)$, to $\langle\int XdM, \int YdN\rangle = \int XYd\langle M, N\rangle$.

Zad 8. Niech $M = \{M_t\}_{t<T} \in \mathcal{M}^{2,c}_{T,loc}$, $M_0 \equiv 0$, oraz $t < T \leq \infty$. Wykazać, że

a) $M_t = \int_0^t dM_t$,
b) $\int_0^t M_s dM_s = \frac{1}{2}M^2_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t$,
c) $\int_0^t s dM_s = tM_t - \int_0^t M_s ds$,
d) $\int_0^t M^2_s dM_s = \frac{1}{3}M^3_t - \int_0^t M_s ds$.

Zad 9. Uzupełnić dowód wzoru Ito.